

動的計画法を用いた板金構造物の展開図作成手法*

外山 眞也*¹

Dynamic Programming for Generating of a Sheet Metal Development

Masaya TOYAMA

本研究は、板金構造物の多種多様な展開図を作成する手法について報告するものである、手法として与えられた二つの断面を点群で近似表現しなおし、目的関数として二つの断面の点間距離の総和と結線によって生成された側面の法線ベクトルの角度変化の滑らかさを評価した。この評価関数の実用性を検証するために遺伝的アルゴリズムを用いた手法を開発し、評価関数の有用性を示すことができた。また、分枝限定法等を用いた手法の開発を行い、より良い手法の検討を実施した。

本研究では、分枝限定法における暫定値、下界値の計算に動的計画法を用いることにより最適解を得る方法について検討し、計算量を減少させることができたので報告する。

キーワード：動的計画法、板金展開図、最適化問題、CAD

1 はじめに

流体や気体の流れの方向を制御するダクトや配管の形状は多種多様であり、現状のCADシステムでは対応できず、現場では経験やカンに頼って作業を行うことが多いのが現状である。そこで、展開図作成のための結線を最適化問題として定式化し、上面・下面の二つの断面形状を与えさえすれば、断面間の結線と構造物側面の最適な形状の生成を自動的に行い、その構造物における展開図を生成する手法を研究してきた。

本研究では、分枝限定法における暫定値、下界値の計算に動的計画法を用いることにより最適解を得る方法について検討し、計算量を減少させることができたので報告する。

によりその展開図を求めることができる。そして平板形状のものを折り曲げ加工した板金を組み合

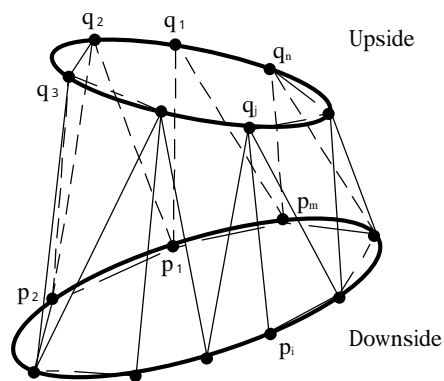


図1 結線の例

2 開発方法

2-1 対象とする問題

流体の流れを制御するダクト等の板金構造物には、必ず流体の入口と出口がある。このような板金構造物に関しては、その入口と出口をつなぐ側面を三角形平板で構成し直し、平面に広げること

表1 結線状態の行列表現例

		Points of Entrance						
		1	2	3	...	j	...	n
Points of Exit	1	1	▶ 1	0	0	0	0	0
	2	0	0	↓ 1	0	0	0	0
	3	0	0	0	▶ 1	0	0	0
	...	0	0	0	...	0	0	0
	i	0	0	0	1	▶ 1	0	0
	...	0	0	0	0	1	↓ ...	1
m	1	0	0	0	0	0	0	1

* 板金展開図自動設計CADの研究(第2報)

* 1 機械電子・デザイン部

わせて、結線部を溶接して板金構造物を製作している。

そこで、その入口と出口の各形状を点群で直線近似された形状として定義し、その二つの形状間を結ぶ側面三角形平板を生成することを考える。図1に対象とする形状例を示す。下部断面形状を表現する m 個の点を $p_i (i=1, \dots, m)$ 上部断面形状を表現する n 個の点を $q_j (j=1, \dots, n)$ としたとき、結線する線の数は、 $m+n$ 個となり、結線状態は表1の行列 $X=(x_{i,j})$ で表現できる。この表は、上部断面形状の点群を行、下部断面形状の点群を列方向に並べ、その対応する2点を結線する場合は行列要素が“1”となっている。そして、一方の断面形状の点のうちの1点と、もう一方の断面形状の点のうちの隣り合う2点との都合3点で一つの三角形平板が定義され、側面は全部で $m+n$ 個の三角形平板によって生成されることになる。また、各結線は隣り合う二つの三角形平板の辺として共有される線分となるため、生成される結線の数は三角形平板の数と同じく $m+n$ となる。ただし、隣接する二つの三角形平板が同一平面上にある場合は、一つの四角形として展開図を作成する。

2-2 問題の定式化

展開図作成において、曲げ加工線の長さは短いほど(曲げ加工部の面積は小さく)、加工の点で好ましい。また、側面の形状において急激な凹凸の変化は少ないほうが良い、そこで、展開図の結線決定問題をこの二つの規準を用いた最適化問題として定式化する。まず一つの規準は結線長さの総和の評価であり、もう一つの規準は生成された側面の法線ベクトルによる方向変化の滑らかさの評価である。

下部と上部の形状を表現する点において、各点 p_i, q_j 間の距離 $l_{i,j}$ を求めた行列 $L=(l_{i,j})$ 、0-1定数行列 $A=(a_{i,j})$ 、 $A=(a_{i,j})$ を作成する。ここで、 $a_{i,j}$ は隣接する三角形 (p_{i-1}, p_i, q_j) 、 (p_i, q_{j+1}, q_j) の単位法線ベクトルが一致するとき“0”、そうでないとき“1”となる0-1定数である。同様に、 $a_{i,j}$ は (p_i, q_j, q_{j-1}) と (p_i, p_{i+1}, q_j) の二つの隣接する三角形において、単位法線ベクトルが一致しているかどうか

を0-1で表現している。なお、 (p_{i-1}, p_i, q_j) と (p_i, p_{i+1}, q_j) 及び (p_i, q_j, q_{j-1}) と (p_i, q_{j+1}, q_j) の組合せの場合には、各断面形状の隣接する三点は一直線上にはないので、対応する $a_{i,j}$ 及び $a_{i,j}$ は常に“1”である。このため、以下では、 $a_{i,j}$ 及び $a_{i,j}$ の表記を用いず、その代わりに、数値“1”を用いる。そして、三角形 (p_i, q_{j+1}, q_j) の面積 $S_{i,j}$ を要素とする定数行列 $S=(S_{i,j})$ 及び (p_i, p_{i+1}, q_j) の面積 $S_{i,j}$ を要素とする定数行列 $S=(S_{i,j})$ を作成する。また、三角形 (p_i, q_{j+1}, q_j) の単位法線ベクトル $n_{i,j}$ のXY平面上での方向角度 $\theta_{i,j}$ を求め、注目している側面の両側に隣接する二つの側面の方向角度の平均値と $\theta_{i,j}$ の偏差を $\Delta\theta_{i,j}$ として求めている。 $\Delta\theta_{i,j}$ も同様にして求められる。ここで、XY平面は、下部形状を表現する点群の重心を原点とし、原点と上部形状を表現する点群の重心を結ぶ線分がZ軸上となるようにしたX-Y-Z三次元直交座標系のXY平面である。

この板金構造物の展開図の結線決定問題を、結線の長さの総和 f_l と、側面構成要素の単位法線ベクトルを用いて側面の方向変化の滑らかさを評価する関数 f_v を用いて、結線状態を表す行列 $X=(x_{i,j})$ の各要素の値を決定する0-1計画問題として、以下のように定式化する。

$$f = \alpha_0 f_l + \beta_0 f_v \tag{1}$$

$$f_l = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n l_{i,j} (a_{\Delta_{i,j}} x_{i,j} + a_{\nabla_{i,j}} x_{i,j+1} + a_{\nabla_{i,j}} x_{i,j} + a_{\nabla_{i,j}} x_{i,j})$$

$$f_v = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (S_{\Delta_{i,j}} |\Delta\theta_{\Delta_{i,j}}(X)| + S_{\nabla_{i,j}} |\Delta\theta_{\nabla_{i,j}}(X)|)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{i,j} = m + n \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{i,j} \cdot x_{i+1,j} = m \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{i,j} \cdot x_{i,j+1} = n \tag{4}$$

$$x_{i+1,j} + x_{i,j+1} = 1 \quad (x_{i,j} = 1) \tag{5}$$

$$x_{i,j} \in \{0,1\}$$

$$(x_{i,i+1} = x_{i,i+1}, x_{n+1,j} = x_{1,j}, x_{i,0} = x_{i,n}, x_{0,j} = x_{m,j})$$

$$a_{\Delta_{i,j}} \in \{0,1\}, a_{\nabla_{i,j}} \in \{0,1\}$$

$$\gamma_{\Delta_{i,j},j} \in \{0,1\}, \gamma_{\nabla_{i,j},j} \in \{0,1\}$$

$$\Delta\theta_{\Delta_{i,j}}(X) = x_{i,j+1}(\theta_{\Delta_{i,j}} - \frac{1}{2}(\theta_{\Delta_{i,j},j} + \theta_{\Delta_{i,j},j+1}))$$

$$+ (a_{\nabla_{i,j}} \theta_{\nabla_{i,j+1}} + (1 - a_{\nabla_{i,j}})(\theta_{\nabla_{i,j},j} + \theta_{\nabla_{i,j},j+1})) x_{i,j}$$

$$+ (a_{\Delta_{i,j+1}} \theta_{\Delta_{i,j+1}} + (1 - a_{\Delta_{i,j+1}})(\theta_{\Delta_{i,j+1},j} + \theta_{\Delta_{i,j+1},j+1})) x_{i,j+1}$$

$$\begin{aligned} \Delta \theta_{2,j}(X) = & x_{i,j} x_{i+1,j} (\theta_{2,j} - \frac{1}{2}(\theta_{2,j} + x_{i,j+1} + \theta_{2,j+1} x_{i,j+2} \\ & + (a_{\Delta 2,j} \theta_{\Delta 2,j} + (1 - a_{\Delta 2,j}) \theta_{2,j+1} x_{i,j+1} + \theta_{\Delta 2,j} x_{i+2,j})) x_{i+1,j} \quad (7) \\ & + (a_{\Delta 2,j+1} \theta_{\Delta 2,j+1} + (1 - a_{\Delta 2,j+1}) \theta_{2,j+1} x_{i+1,j+2} + \theta_{\Delta 2,j+1} x_{i+2,j+1})) x_{i+1,j} \end{aligned}$$

ここで、 $n_{i,j}, n_{i,j}$ はそれぞれ (p_i, p_{i+1}, q_j) 及び (p_i, q_{j+1}, q_j) の単位法線ベクトルである。

目的関数の第一項 f_1 は結線長さの総和を、第二項 f_2 は側面構成要素の単位法線ベクトルを用いて側面の方向変化の滑らかさを評価するものである。 α_0, β_0 は正または0であり、問題例を与える段階で決定される目的関数の各項の加重である。

ここで、側面を構成する三角形の中に、同一平面にあるような隣接する三角形が一組でもある場合には、その二つの三角形の境界線は加工線とはならず四角形の側面上の対角線となるため、 f_1 にその長さを含まないように定式化している。そこで、目的関数の第一項 f_1 を、上下二つの断面形状における各節点間の距離 $l_{i,j}$ と結線状態を示した行列 X の要素 $x_{i,j}$ 及び0-1定数行列 $A = (a_{i,j}), A = (a_{i,j})$ の各要素を用いて定式化している。この定式化により、例えば線 $p_i p_{i+1}$ と線 $q_{j-1} q_j$ が平行であるとき、この二つの側面三角形は一つの四角形平面として取り扱い、境界となっている結線部分の長さ $l_{i,j}$ を結線長さの総和の計算に含めないようにできる。また、2点 p_i, q_j が結線された場合に、隣接する二つの三角形の組み合わせは、 $(p_i, p_{i+1}, q_j), (p_i, p_{i+1}, q_{j+1}), (p_i, q_{j+1}, q_j), (p_i, q_j, q_{j+1})$ の4通りあるが、そのすべての場合に対応できる。

目的関数の第二項 f_2 は、側面構成要素の単位法線ベクトルのXY平面上への射影のX軸からの方向角度 $\theta_{i,j}$ を求め、それとその側面構成要素の両側に隣接する二つの側面構成要素における単位法線ベクトルのXY平面上への射影のX軸からの方向角度の平均値との偏差 $|\Delta \theta_{i,j}|$ により評価している。各三角形側面に対し、単位法線ベクトルが定まる。そこで、この単位法線ベクトルが隣接する側面間でなめらかに変化するかどうかを評価する以下の関数 f_2 を目的関数に加え、外観を考慮して最適な結線状態を求めるようにした。三角形側面の面積が大きい程、外観への影響が大きいという判断から、三角形側面の面積を加重として用いている。

ここで、 $S_{i,j}$ は $(p_i, q_{j+1}, q_j), S_{i,j}$ は (p_i, p_{i+1}, q_j) の面積である。一方、 $\Delta \theta_{i,j}$ 及び $\Delta \theta_{i,j}$ は、各々 (p_i, p_{i+1}, q_j) 及び (p_i, q_{j+1}, q_j) の単位法線ベクトルによる方向角度と、その両側に隣接する三角形側面の単位法線ベクトルによる方向角度との偏差である。XY平面における方向角度 $\theta_{i,j}$ は (p_i, q_{j+1}, q_j) の単位法線ベクトル $n_{i,j}$ のX成分($n_{i,j,x}$)、Y成分($n_{i,j,y}$)を用いて(24)式で求められる。なお、Z成分の変化は無視できるものとしている。

同様に、 (p_i, p_{i+1}, q_j) の単位法線ベクトル $n_{i,j}$ を用いて、 $\theta_{i,j}$ は次式で求められる。

側面を構成する三角形において、隣接する三角形が同一平面に一組も無い通常の場合は、例えば (p_i, p_{i+1}, q_j) において、左右に隣接する三角形は各々二通りあり得るので、 $\Delta \theta_{i,j}$ を求める際の場合の数は4となる。一方、隣接する三角形が同一平面内に存在する場合は、その二つの三角形で形成される四角形を一つの面として $\Delta \theta_{i,j}$ を求める必要がある。隣接する三角形が同一平面内にある場合を含めると、 $\Delta \theta_{i,j}(X)$ を求める際の場合の数は16となる。このすべての場合を考慮して $\Delta \theta_{i,j}(X)$ 、同様に $\Delta \theta_{i,j}(X)$ を求めている。このようにして、 $\Delta \theta_{i,j}(X), \Delta \theta_{i,j}(X)$ は、結線状態を表す行列 $X = (x_{i,j})$ の各要素を変数とする関数として表現できる。

次に制約条件について述べる。(2)式は結線数の制約条件、(3)・(4)・(5)・(6)及び(7)式は結線で側面が形成されるための条件である。(2)・(3)・(4)・(5)・(6)・(7)式を満たすことにより側面は上下断面形状のどちらか一方の一点と他方の隣り合う2点との三点で決定される三角形で構成される。

(5)・(6)及び(7)式は結線状態の制約条件である。また i,j,r,j' は、三角形側面が交差しないための制約条件で、下断面形状の一辺を底辺とする三角形側面に、上下の断面間を結線する線分が貫通するのを判定した0-1定数である。線分 $p_i p_{i+1}$ を底辺とする (p_i, p_{i+1}, q_j) と線分 $p_{i'} q_{j'}$ が交差した場合には側面を展開できない。このとき、線分 $p_{i'} q_{j'}$ を含む直線が (p_i, p_{i+1}, q_j) を含む平面と交差する点 r は (p_i, p_{i+1}, q_j) 内に存在し、を満たす。このとき $i,j,r,j' = 1$ とした。このよう

にして(2)~(7)式の条件を満たせば展開図作成に必要な結線状態が得られる。

2 - 3 動的計画法の適用

展開図作成に必要なすべての結線を決定する過程は、各一つの結線を決定する素過程に分解できる。また、各決定の評価値は、a)一つの結線の長さ、b)一つの三角形(または四角形)側面の法線ベクトルとその両側に隣接する二つの三角形(または四角形)の法線ベクトルを元に計算できる。この計算において、 $x_{i,j} = 1$ のとき、 $x_{i-1,j} = x_{i+1,j} = 1$ 、または $x_{i-1,j} = x_{i,j+1} = 1$ 、または $x_{i,j-1} = x_{i+1,j} = 1$ 、または $x_{i,j-1} = x_{i,j+1} = 1$ となる。この四つの場合は結線する点を、下断面形状の点を左から順番に、次に、上断面形状の点を左から順番に並べることで、各々 $(i-1, i, i+1, j, j, j)$ $(i-1, i, i, j, j, j+1)$ $(i, i, i+1, j-1, j, j)$ $(i, i, i, j-1, j, j+1)$ となり6次元空間の超格子点として表現できる(図2参照)

また、側面の平滑性の評価関数 f_i においては、 $x_{i,j} x_{i+1,j} = 1$ のとき $x_{i,j} x_{i,j+1} = 0$ となるので、 $x_{i,j} = 0$ となる。同様に、 $x_{i,j} x_{i,j+1} = 1$ のとき $x_{i,j} = 0$ となる。いま、 $x_{i,j} x_{i+1,j} = 1$ の場合を考えると、 $(x_{i-1,j-1} x_{i,j-1} = 1, x_{i,j-2} x_{i,j-1} = 1, x_{i-1,j-1} x_{i-1,j} = 1, x_{i-2,j} x_{i-1,j} = 1)$ の内のいずれか一つと $(x_{i+1,j+1} x_{i+2,j+1} = 1, x_{i+1,j+1} x_{i+1,j+2} = 1, x_{i+2,j} x_{i+2,j+1} = 1, x_{i+2,j} x_{i+3,j} = 1)$ の内のいずれか一つとの組合せの16通りが有り得る。しかし、一つの断面を点群で近似するとき、直線はその両端点を、円弧の場合は指定された分割数による分割点を用いた点群を使用するので、一つの断面形状において隣接する三点は一直線状に存在することはないので、図2のa)の場合で示す組み合わせの数は6通りである。そして、図2のa)及びb)で示す組合せの数は12通りとなる。この12通りの場合は、結線する点を下断面形状の点を左から順番に、次に、上断面形状の点を左から順

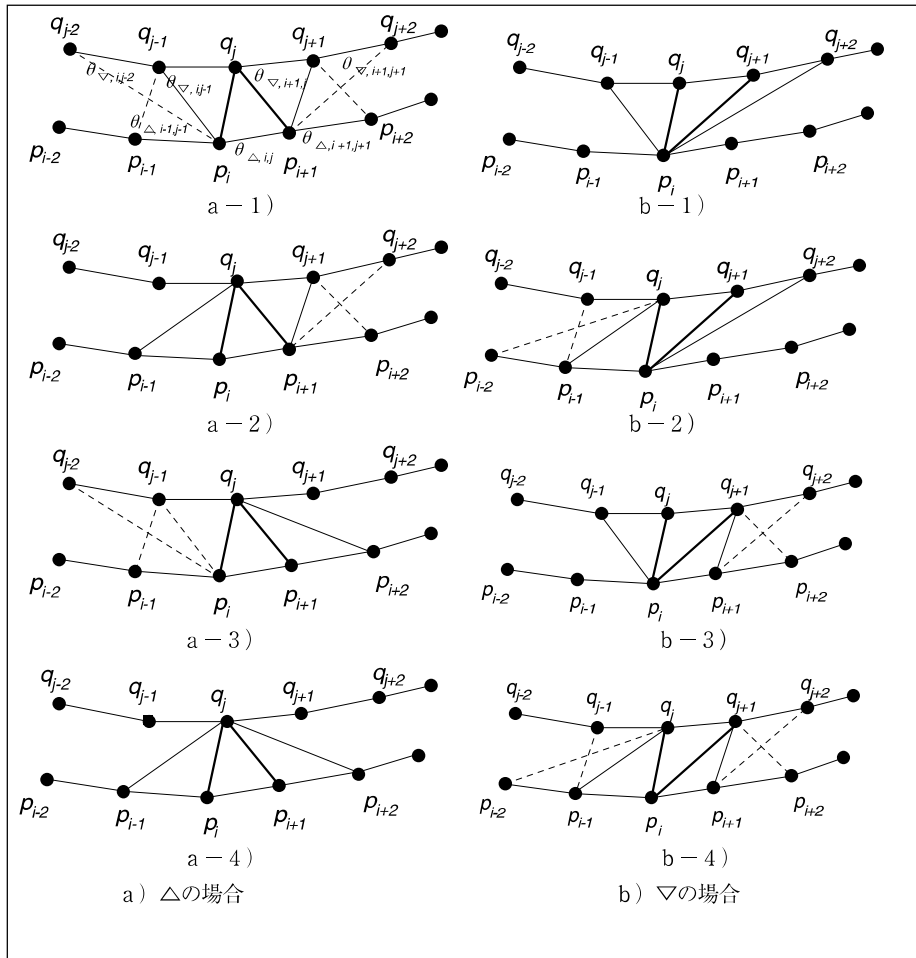


図2 結線のシステム状態の例

番に並べることで、12次元空間の超格子点として表現できる。 $x_{i,j}x_{i,j+1} = 1$ の場合にも、同様に12次元空間の超格子点として表現できる。

そして、結線の順番を上断面形状から下断面形状を見て反時計回りすると、一番最初から一番最後まで結線の順番を決めることができる。この一番最後の結線を「決定」とみなし、12次元空間の超格子点を「システムの状態」とみなす。決定によるシステムの状態変化は、超格子点のベクトル表示において、下断面形状の点に相当する要素の部分で、最初の結線に相当する要素を削除して、その他を一つ左にずらし、最後に新たな結線に相当する要素を書き、同様な処理を上断面形状の点に相当する要素の部分で行うことで実現する。そして、決定の評価値は、結線の長さの総和 f における該当する一つの項と側面の平滑性の評価関数 f_s における該当する一つの項を、各々 α, β (> 0)を加重として、加重和することで計算できる。

上記のシステム状態は有限個である。そこで、各超格子点に状態番号を与えることができる。

そして、(1)式を目的関数とし、制約条件を(2)~(7)式とした最適化問題は、次のような部分問題に分解できる。部分問題は、結線行列 X の1行目の要素のうち1つを $x_{1,j} = 1$ とし、冗長性を回避するため、 $x_{1,j-1} = 0$ とした12個の超格子点のうち1つを初期状態とし、 $x_{m,j} = 1$ で、初期状態と矛盾しない2個のうち1個の超格子点を最終状態とした $12n$ 個の最短経路問題として作成できる。そして、この $12n$ 個の各最短経路問題を解いて、得られた各最適解の中で目的関数値が最小となる解を求めることにより、最適化問題として解ける。

ここで、上記最短経路問題の数の説明を三角形側面の形状の観点で補足する。冗長性を回避するため、上記 $x_{1,j-1} = 0$ に起因して、形状の三角形側面1つを前提条件としているため、結線開始位置でのシステム状態数は12となり、そのため、最終結線位置のシステム状態においても、形状の三角形側面1つを前提条件としているため、システム状態数は12となる。最終状態から状態変化で遷移できる初期状態数は2である。また、初期結線の結線行列における位置が n とおりある。このため、問題Pに対する最短経路問題は、 $12n$ 個

作成される。

各最短経路問題では、地点(システムの状態) i から直接到達できる地点の集合を $N(i)$ で示すと、地点 i から最終地点までの距離(評価値)の総和の最小値は、

$$f(i) = \min_{j \in N(i)} [t_{i,j} + f(j)] \quad (8)$$

と表せる。ここで、 $t_{i,j}$ は地点 j から i までの距離(評価値)を示す。下断面形状の点数 m 、上断面形状の点数 n の時、結線行列 X において、“1”となる要素の個数は $m+n$ となる。そして、 $m \times n$ 個の行列要素において、超格子点で表現できるすべてのシステムの状態を作成し、状態番号を割り当て、各状態から状態変化できる状態番号を求める。そして、最短経路問題の動的計画法による解法[1]を用いて、各最短経路問題について、最終状態から始めて各状態での最適決定を初期状態まで順次求めていき、今度は初期状態から順に各状態での最適決定をたどることにより最適解が得られる。

上記最短経路問題の解法では、二つの断面形状の重心位置のXY座標が大きくずれている場合に、生成された側面が交差する場合が発生し解を求められなくなることがある。このとき、二つの断面形状の重心位置のXY座標が一致するように平行移動を行って解を求めることが可能となる。

3 結果及び考察

上下の断面形状を表現する節点間の最適な結線状態を本法で求めた。得られた結果を図3に示す。曲線を含むあらゆる形状を節点で表現することにより、様々な形状の適正な結線を行い側面を生成し、展開図を作成できる実用上の意義は大きい。本研究の例では、各項の平均値 f_{lave} , f_{vave} を求めるためにランダム発生させる実行可能解の数は500とした。本研究では、COMPAQ製Professional Workstation AP550 CPU1GHz(メモリ512MB)を計算に用いた。

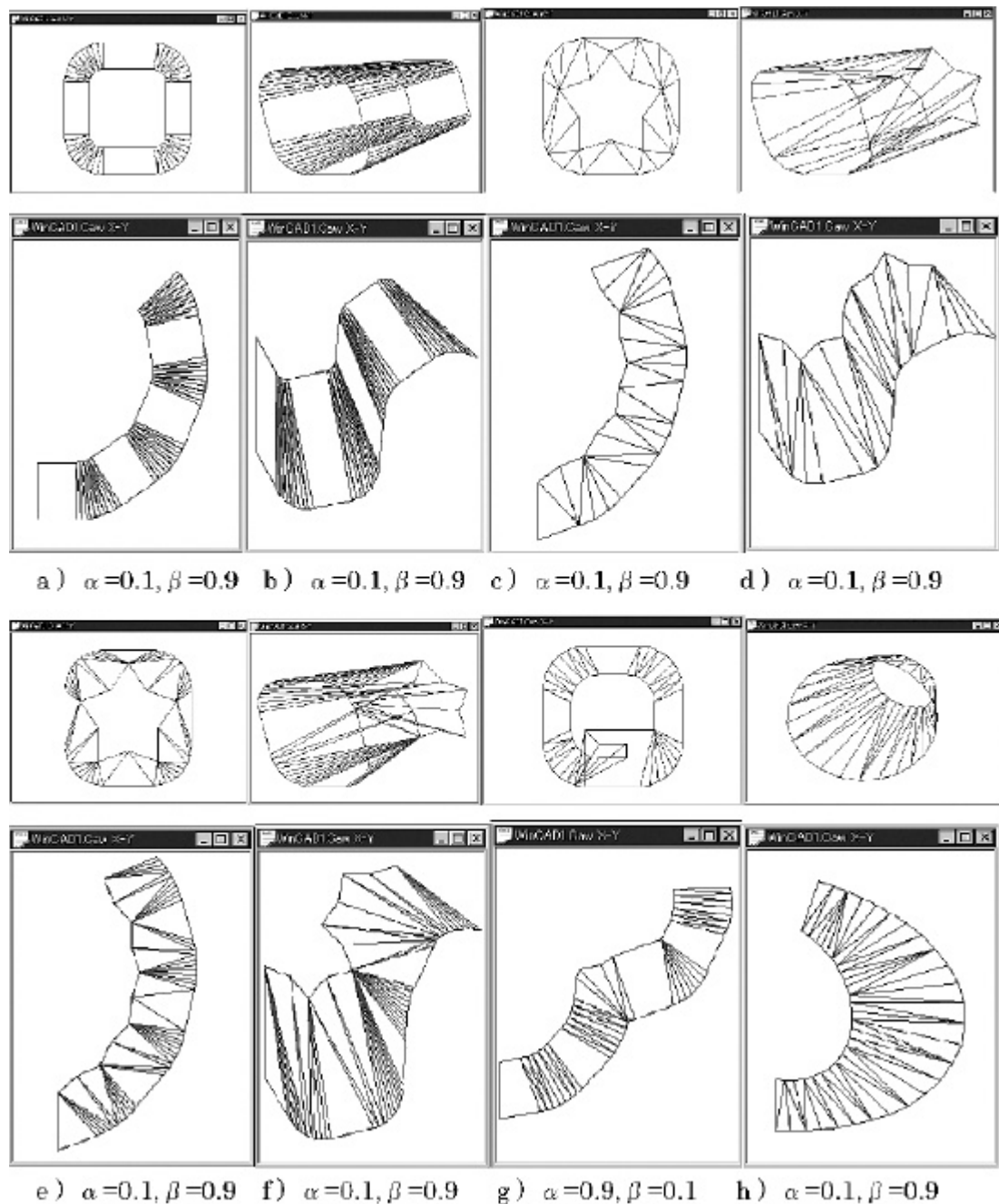


図3 動的計画法を適用して求めた展開図例

4 まとめ

板金構造物の展開図作成で上下断面形状を表現する節点間の最適な結線状態を決定する最適化問題を、動的計画法を基本として解くためのアルゴリズムを開発した。目的関数としては、結線長さの総和と、側面構成要素三角形の法線方向の角度変化の滑らかさの二つの関数の加重和を用いた。

ここで、生成された側面が展開可能なものであるかどうかの判定は、動的計画法では処理できな

い。しかし、展開不可の側面が発生するのは、二つの断面形状の重心位置のXY座標が大きくずれている場合であるので、平行移動を行い重心位置を一致させて求めることが可能になることがわかった。このことにより、問題が解けるようになっただけでなく、高速に最適解を求められるようになった。

なお、今回行った種々の検証実験の結果から、本法は十分実用レベルにあると考えられる。

5 参考文献

- 1) 松永省吾, 「システム工学入門」, 東京電機大学出版局, 1987, 71-73.
- 2) M. C. Gan, S. T. Tan and W. Chan
Generating and Flattening of Developable Surfaces, DE-Vol, 69-1, Advances in Design Automation, 359-366, (1994).
- 3) 三谷由香, 入口健二, 加藤清敬: 板金部品の設計システム, 特開平7-56974, (1995).
- 4) 繁山俊雄: 板金製缶展開板取りの実際, 理工学社, (1973).
- 5) 外山眞也, 富田重幸, 吉富康成, 春成嘉弘:
遺伝的アルゴリズムを用いた板金構造物の展開図のための結線手法, 日本オペレーションズ・リサーチ学会論文誌, Vol.44-3, (2001), 230-249.
- 6) 外山眞也, 富田重幸, 吉富康成: 動的計画法を用いた板金構造物の展開図作成のための結線決定法, 日本応用数理学会, Vol.12, No.1, 2002.
- 7) Yu-Long Lin and D. C. H. Yang: Automatic Development Generation for Thin-Walled Objects, DE-Vol, 69-1, Advances in Design Automation, 367-377, (1994).